Perkolacje

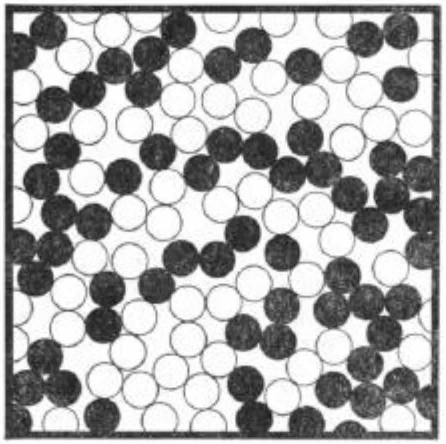


Figure 4. Mixture of conducting and non-conducting grains.

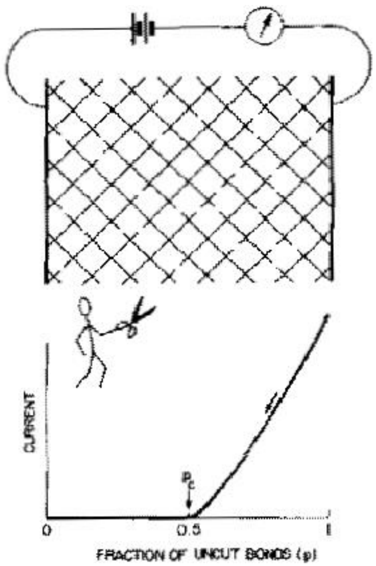
Perkolacja –przepływ cieczy przez ośrodki porowate
colare–płynąć, *per*-przez

- Przejścia fazowe „dla matematyków”
- Ilustracja/sprawdzenie ważnych technik obliczeniowych (symulacje MC, pole średnie, grupa renormalizacji)

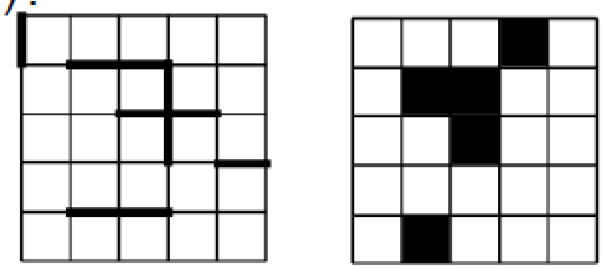
Przykłady perkolacji

- Water molecule in a coffee percolator
- Oil in a porous rock & ground water
- Forest fires
- Gelation of boiled egg & hardening of cement
- Insulator – conductor transition

Perkolacje - model matematyczny



- Każdy węzeł (wiązanie) sieci jest zajęty niezależnie z prawdopodobieństwem *p*
- Jak duże musi być to prawdopodobieństwo *p* aby powstał klaster łączący brzegi sieci (przepływ)?



bond percolation *site percolation*

Łączące się zajęte węzły/wiązania tworzą klastry.
W zagadnieniu perkolacyjnym przedmiotem zainteresowania są własności tych klastrów (np.wielkość)

Obliczanie wielkości klastrów

S[x][y]=0 (nieobsadzony), 1 (obsadzony)

```
int size(int x, int y){
if (s[x][y] != 0){
    s[x][y]=0;
    return 1+size(x-1,y) +size(x+1,y) +size(x,y-1) +size(x,y+1);
}
else
  return 0;
}
```

Klaster na sieci posiadający rozmiary zbliżone do rozmiarów systemu nazywamy <u>perkolacyjnym</u>. W granicy wymiaru sieci L→∞ klaster ten istnieje tylko dla $p > p_c$, gdzie p_c jest tzw. <u>progowym prawdopodobieństwem perkolacji</u>.(dla $p < p_c$ wszystkie klastery mają skończone rozmiary.)

p_c zależy od szczegółów zagadnienia (rodzaj sieci, perkolacja wiązaniowa lub węzłowa).

Pytanie: dlaczego p_c nie definiuje się również dla skończonych sieci?

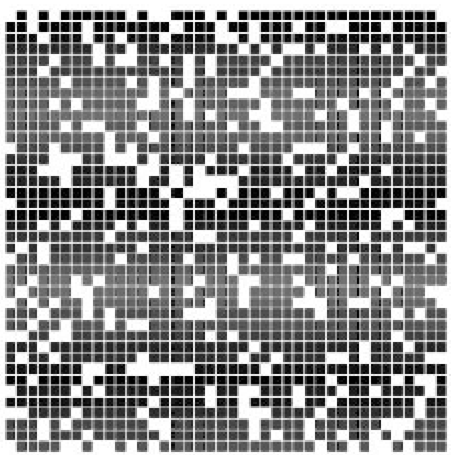
Niech $n_s(p)$ oznacza gęstość s-klastrów (i.e., średnią liczbę klastrów o wielkości s przypadającą na jeden węzeł sieci)

Perkolacja (węzłowa) na sieci kwadratowej

$p = 0.40$

$p = 0.60$

$p = 0.80$



Dla $p > p_c$ klaster perkolacyjny jest nieskończony i pewien (niezerowy) procent P(p) węzłów sieci należy do niego. P(p) nazywane jest również prawdopodobieństwem perkolacji.

$p = p_c$ nazywane jest punktem krytycznym. W punkcie tym niektóre wielkości zachowują się osobliwie.

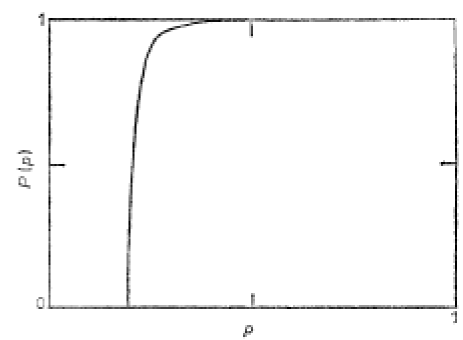


Figure 7. The percolation probability for site percolation on the FCC lattice.

W okolicy $p = p_c$ $(p > p_c)$ mamy $P(p) \sim (p - p_c)^{\beta}$. Dla d=2 mamy β=5/36. Dla d=3 mamy β~ 0.41

<u>Wykładnik krytyczny</u> β zależy od wymiaru sieci d, ale nie od jej rodzaju. Np. zagadnienie perkolacyjne na sieciach trójkątnej, kwadratowej i heksagonalnej mają różne wartości p_c ale takie samo β. Jest to przejaw uniwersalności wykładników krytycznych.

W jaki sposób wielkość największego klastra zależy od rozmiaru sieci L?

W fazie $p > p_c$ (super-krytyczna) spodziewamy się $S_{max} \sim L^2$

W fazie $p < p_c$ (sub-krytyczna) spodziewamy się klastrów o skończonych rozmiarach jednakże z małym prawdopodobieństwem możliwe jest tworzenie większych klastrów. Okazuje się, że w tym przypadku $S_{max} \sim \ln(L)$

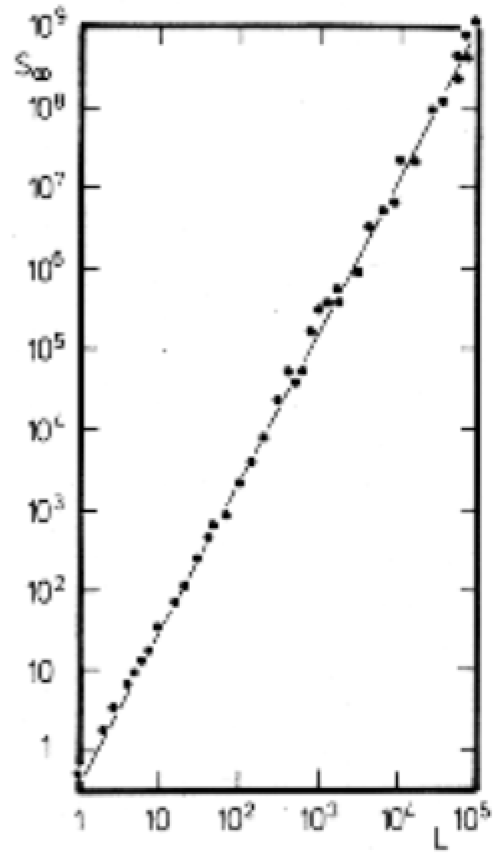
Najciekawszy jest przypadek $p = p_c$, gdzie jak się okazuje $S_{max} \sim L^D$, gdzie D jest tzw. wymiarem fraktalnym. Dla d=2 mamy D=91/48.

fractal scaling

- mass (m) of largest cluster as a function of lattice size (L)

$$m \sim r^{d_f}$$

- $d_f = 91/48 \approx 1.90$



Bardziej wyrafinowane metody obliczeniowe

A) **Algorytm Leatha**

B) Newman, M. E. J., Ziff, R. M., *Efficient Monte Carlo Algorithm and High-Precision Results for Percolation,* Phys. Rev. Lett.85, 19, 4104 (2000)

Literatura:

Gould, Tobochnik, Christian, An Introduction to Computer Simulation Methods, (Chapter 12)